

Exercícios de Matemática Funções – Função Bijetora

1. (Ufpe) Sejam A e B conjuntos com m e n elementos respectivamente. Analise as seguintes afirmativas:

- () Se $f:A \rightarrow B$ é uma função injetora então $m \leq n$.
 () Se $f:A \rightarrow B$ é uma função sobrejetora então $m \geq n$.
 () Se $f:A \rightarrow B$ é uma função bijetora então $m=n$.
 () Se $f:A \rightarrow B$ é uma função bijetora então o gráfico de f é um subconjunto de $A \times B$ com $m \times n$ elementos.
 () Se $m=n$ o número de funções bijetoras $f:A \rightarrow B$ é $m!$

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES.

(Ufpe) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a letra (V) se a afirmativa for verdadeira ou (F) se for falsa.

2. Sejam as funções $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas respectivamente por $f(x)=5^x$ e $g(x)=\log_5 x$. Analise as afirmativas a seguir:

- () $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 () g é sobrejetora.
 () $g(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 () $g(x) = 1 \quad \forall x = 5$
 () Se a e b são reais e $a < b$, então $f(a) < f(b)$.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

(Ufba) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos.

3. Considerando-se as funções

$$f(x) = x - 4,$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 6,$$

é verdade:

- (01) Todos os zeros de g(x) estão contidos no domínio de $h(x)=\log(x^2-4)$.
 (02) A sentença que define $(f \circ g)(x)$ é $x^2 - 5x + 2$.
 (04) g(x) é crescente, para todo $x \in [3, +\infty[$.
 (08) O gráfico de f(x) intercepta os eixos coordenados no ponto (0, 0).

(16) $(g \circ f)(x)$ é função bijetora em \mathbb{R} .

(32) Os gráficos de f(x) e g(x) se interceptam nos pontos (0,-4), (1,2).

(64) O conjunto imagem da função $t(x)=2^x$, sendo $a=f(x) \in \mathbb{R}^* \setminus \emptyset$.

Soma ()

4. (Ita) Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

- I - $\{0\} \in S$ e $S \cap U = \{1\}$.
 II - $\{2\} \in (S - U)$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
 III - Existe uma função $f: S \rightarrow T$ injetiva.
 IV - Nenhuma função $g: T \rightarrow S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)

- a) apenas I.
 b) apenas IV.
 c) apenas I e IV.
 d) apenas II e III.
 e) apenas III e IV.

5. (Unicamp) Sejam N o conjunto dos números naturais e $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função que satisfaz as propriedades:

- a) dado qualquer $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = m$.
 b) $\forall \{s \in \mathbb{N}; s \in f(x)\}$ está contido no conjunto imagem de f, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Mostre que f é sobrejetora.

6. (Ita) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

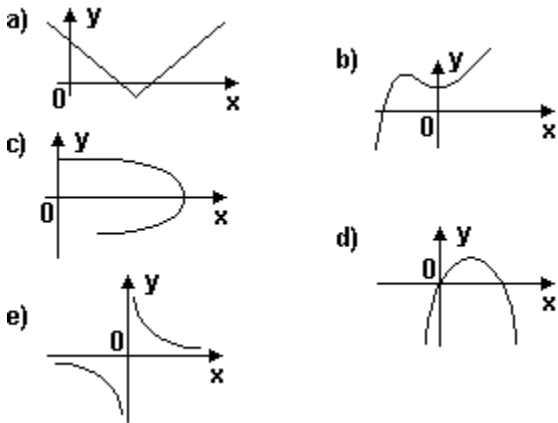
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3, & x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

Então:

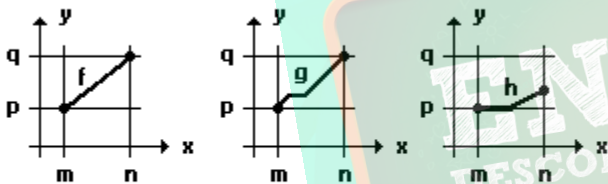
- a) f é bijetora e $(f \circ f)(-2/3) = f \circ \emptyset(21)$.
 b) f é bijetora e $(f \circ f)(-2/3) = f \circ \emptyset(99)$.
 c) f é sobrejetora mas não é injetora.
 d) f é injetora mas não é sobrejetora.
 e) f é bijetora e $(f \circ f)(-2/3) = f \circ \emptyset(3)$.

7. (Ufpe) Seja A um conjunto com 3 elementos e B um conjunto com 5 elementos. Quantas funções injetoras de A em B existem?

8. (Ufpe) Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora $y=f(x)$?



9. (Uff) Considere as funções f , g e h , todas definidas em $[m, n]$ com imagens em $[p, q]$ representadas através dos gráficos a seguir:



Pode-se afirmar que:

- f é bijetiva, g é sobrejetiva e h não é injetiva.
- f é sobrejetiva, g é injetiva e h não é sobrejetiva.
- f não é injetiva, g é bijetiva e h é injetiva.
- f é injetiva, g não é sobrejetiva e h é bijetiva.
- f é sobrejetiva, g não é injetiva e h é sobrejetiva.

10. (Ita) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = -3a\sqrt{x}$, onde a é um número real, $0 < a < 1$.

Sobre as afirmações:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- f é bijetora.
- f é crescente e $f^{-1}(0, +\infty) =]-3, 0[$.

Podemos concluir que:

- Todas as afirmações são falsas.
- Todas as afirmações são verdadeiras.
- Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
- Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
- Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

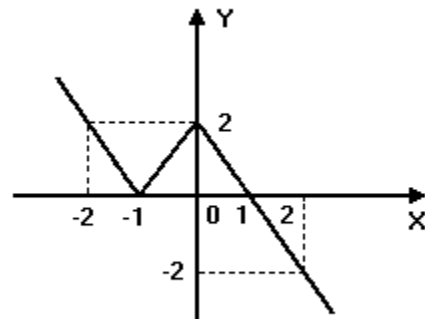
11. (Mackenzie) Analisando graficamente as funções (I), (II), (III) e (IV) a seguir.

- $f(x) = x + (2|x|)/x$ de $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$
- $g(x) = 3x - x^2$ de $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \rightarrow [-2, 2]$
- $h(x) = (1/3)^x$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$
- $t(x) = 3$, de $\mathbb{R} \rightarrow \{3\}$

O número de funções sobrejetoras é:

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

12. (Puccamp) Seja f a função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pelo gráfico a seguir

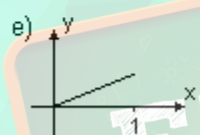
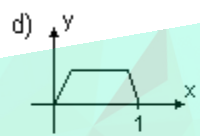
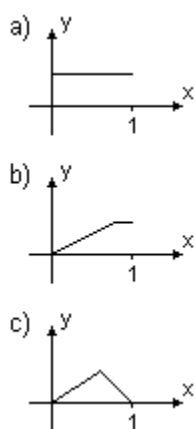


É correto afirmar que

- a) f é sobrejetora e não injetora.
- b) f é bijetora.
- c) $f(x) = f(-x)$ para todo x real.
- d) $f(x) > 0$ para todo x real.
- e) o conjunto imagem de f é $]-\infty; 2]$.

13. (Unifesp) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de x correspondem valores distintos de y ". Tais funções são chamadas injetoras.

Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?



14. (Ufm) Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E .

Se $f: E \rightarrow P$ é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então

- a) f não pode ser uma função bijetora.
- b) f não pode ser uma função injetora.
- c) f é uma função sobrejetora.
- d) f é necessariamente uma função injetora.

15. (Ufc) Sejam a, b, c e d números reais com $a < b$ e $c < d$. Suponha que $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ é uma função estritamente crescente (isto é, $x < x', \implies f(x) < f(x')$) e sobrejetiva. Então podemos afirmar corretamente que:

- a) $f[(a+b)/2] = (c + d)/2$
- b) $f(a) = c$ e $f(b) = d$
- c) $f(a) + f(b) \in [c, d]$
- d) $f(b) - f(a) \in [c, d]$
- e) $|f(a)| < |f(b)|$

16. (Ita) Seja $D = \mathbb{R} - \{1\}$ e $f: D \rightarrow D$ uma função dada por

$$f(x) = (x + 1)/(x - 1).$$

Considere as afirmações:

- I - f é injetiva e sobrejetiva.
- II - f é injetiva, mas não sobrejetiva.
- III - $f(x) + f(1/x) = 0$, para todo $x \in D, x \neq 0$.
- IV - $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in D$.

Então, são verdadeiras

- a) apenas I e III.
- b) apenas I e IV.
- c) apenas II e III.
- d) apenas I, III e IV.
- e) apenas II, III e IV.

17. (Uem) Considere as funções reais f e g definidas por $f(x) = x+2$ e $g(x)=x^2$, para todo x real. Nessas condições, assinale o que for correto.

- 01) As funções f e g são sobrejetoras.
- 02) Os domínios de $(f \cdot g)(x)$ e $f(x)/g(x)$ diferem por um único número real.
- 04) $ff(x) = (f \circ f)(x) = x^2 + 4x + 4$.
- 08) Os gráficos de f e de g se interceptam no ponto $P(2,4)$.
- 16) As funções f e g são injetoras no intervalo $[0, \infty)$.
- 32) O único valor de x para o qual a função $F(x) = (g \circ f)(x)$ se anula é zero.
- 64) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$ e $(g \circ f)(x) = x^2 + 4x + 4$.

18. (Ufsc) Assinale a soma dos números associados à(s) proposição(ões) CORRETA(S).

(01) A representação dos pontos do plano através de pares ordenados de números reais (x, y) deve estar sempre referenciada a um sistema de eixos ortogonais.

(02) Um subconjunto A dos números reais será denominado intervalo quando a implicação " $a, b \in A$ e $a < x < b \Rightarrow (x \in A)$ " for verdadeira.

(04) É possível obter uma bijeção entre o conjunto N dos números naturais e o conjunto Z dos números inteiros.

(08) É possível obter uma bijeção entre o conjunto N dos números naturais e o conjunto Q_0 dos números racionais positivos.

(16) Se $a < b$ são dois números racionais existem sempre x racional e y irracional com $a < x < b$ e $a < y < b$.



GABARITO

proposições incorretas: 01

1. V V V F V

2. V V V V V

3. $02 + 04 + 64 = 70$

4. [B]

5. A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é sobrejetora se, e somente se, $\text{Im}(f) = \mathbb{N}$.

Seja $y \in \mathbb{N}$.

Pelo item a), dado $y \in \mathbb{N}$, Existe $i \in \mathbb{N} / f(i) = y$.

Pelo item b), $y \in A_i = \{y \in \mathbb{N}; \exists i \in \mathbb{N} / f(i) = y\}$ e $A_i \subseteq \text{Im}(f)$, assim se $y \in A_i \subseteq \text{Im}(f)$ então $y \in \text{Im}(f)$.

Portanto, $\forall y \in \mathbb{N}$, Existe $x \in \mathbb{N} / y = f(x)$, ou seja $\text{Im}(f) = \mathbb{N}$.

6. [B]

7. 60

8. [E]

9. [A]

10. [E]

11. [D]

12. [A]

13. [E]

14. [C]

15. [B]

16. [A]

17. itens corretos: 02, 08, 16 e 64

itens incorretos: 01, 04 e 32

18. proposições corretas: 02, 04, 08 e 16

