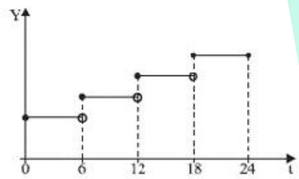
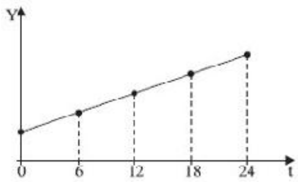
Exercícios de Matemática
Função Exponencial

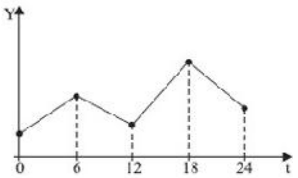
1) (Unirio-1998) Uma indústria fabrica 100 produtos diferentes, que já estão no mercado. Para facilitar a identificação de cada produto, via computador, será criado um código de barras especial, onde cada barra é [] ou [ ]. O número mínimo de barras necessárias para se criar um código de barras que identifique cada um dos 100 produtos é igual a: (se necessário, use log 2 = 0,3)

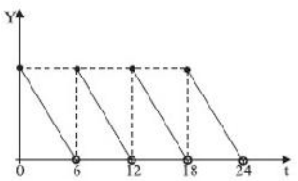
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

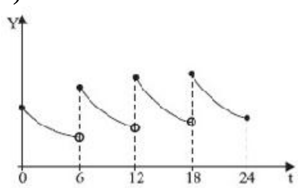
2) (UNIFESP-2007) Uma forma experimental de insulina está sendo injetada a cada 6 horas em um paciente com diabetes. O organismo usa ou elimina a cada 6 horas 50% da droga presente no corpo. O gráfico que melhor representa a quantidade Y da droga no organismo como função do tempo t, em um período de 24 horas, é

a)


b)


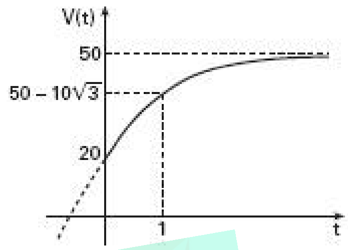
c)


d)


e)


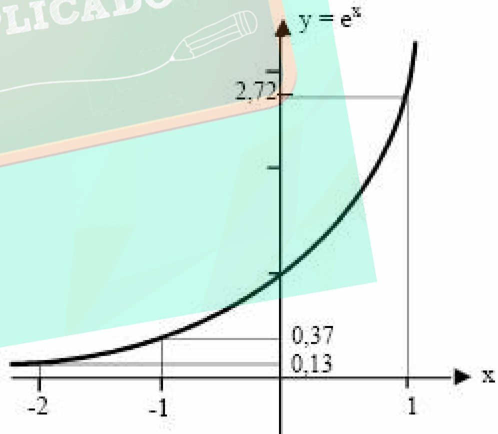
3) (FGV-2005) Uma empresa estima que após completar o programa de treinamento básico, um novo vendedor, sem experiência anterior em vendas, será capaz de vender V(t) reais em mercadorias por hora de trabalho, após t meses do início das atividades na empresa. Sendo $V(t) = A - B.3^{-kt}$, com A, B e k constantes obtidas experimentalmente, pede-se:

a) determinar as constantes A, B e k, sabendo que o gráfico da função V é



b) admitindo-se que um novo programa de treinamento básico introduzido na empresa modifique a função V para $V(t) = 55 - 24.3^{-t}$, determinar t para V(t) = 50. Adote nos cálculos log2 = 0,3 e log3 = 0,5.

4) (UERJ-1998) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função f(d), cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão.
Considere o gráfico auxiliar, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100.e^{-0,2d}$ e o gráfico acima, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando d for igual a :

a) 5
b) 10
c) 15
d) 20

5) (UNIFESP-2008) Uma das raízes da equação $2^{2x} - 8.2^x + 12 = 0$ é x = 1.
A outra raiz é

a) $1 + \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$

b) $1 + \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

c) $\log_{10}3$

d) $\frac{\log_{10} 6}{2}$

e) $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$

6) (Vunesp-1999) Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei $N(t) = \alpha.10^{\lambda\tau}$, onde N(t) é o número de bactérias em t horas, $t \geq 0$, e α e λ são constantes estritamente positivas. Se após 2 horas o número inicial de bactérias, N(0), é duplicado, após 6 horas o número de bactérias será

a) 4α
b) $2\alpha\sqrt{2}$
c) 6α
d) 8α
e) $8\alpha\sqrt{2}$

7) (FMTM-2002) Uma cultura bacteriana apresenta inicialmente uma população de 10 000 bactérias. Após t horas, sua população será de $10\,000.(1,2)^t$ bactérias. A população da cultura será de 30 000 bactérias após um número de horas igual a

a) 2.
b) 3.
c) 4.
d) 5.
e) 6.

8) (FGV-2004) Uma certa mercadoria foi promovida por uma substancial campanha de propaganda e, pouco antes de encerrar a promoção, a quantidade diária de vendas era 10 000 unidades. Imediatamente após, as vendas diárias decresceram a uma taxa proporcional às vendas diárias, tal que:
$V(t) = B . e^{k.t}$, sendo B o número de unidades vendidas em um determinado dia; V(t) a quantidade de vendas por dia, após t dias; e = 2,72 e k um número real. Sabe-se que 10 dias após encerrar a promoção o volume diário de vendas era 8 000 unidades.

a) Qual o volume diário de vendas 30 dias após o encerramento da promoção?
b) Quando se espera que a venda diária seja reduzida a 6 400 unidades?

Considere que $\log 2 = \frac{3}{10}$, sendo log 2 o logaritmo de 2 na base 10.

9) (Fuvest-1999) Um jogo eletrônico funciona da seguinte maneira: no início de uma série de partidas, a máquina atribui ao jogador P pontos; em cada partida, o jogador ganha ou perde a metade dos pontos que tem no início da partida.

a) Se uma pessoa jogar uma série de duas partidas nas quais ela ganha uma e perde outra, quantos pontos terá ao final?
b) Se uma pessoa jogar uma série de quatro partidas nas quais ela perde duas vezes e ganha duas vezes, quantos pontos terá ao final?
c) Se uma pessoa jogar uma série de sete partidas, qual o menor número de vitórias que ela precisará obter para terminar com mais que P pontos?

10) (UEL-2003) Um dos traços característicos dos achados arqueológicos da Mesopotâmia é a grande quantidade de textos, escritos em sua maioria sobre tabuinhas de argila crua. Em algumas dessas tabuinhas foram encontrados textos matemáticos datados de cerca de 2000 a.C. Em um desses textos, perguntava-se "por quanto tempo deve-se aplicar uma determinada quantia de dinheiro a juros compostos de 20% ao ano para que ela dobre?". (Adaptado de: EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995. p. 77.)
Nos dias de hoje, qual equação seria utilizada para resolver tal problema?
a) $(1,2)^t = 2$
b) $2^t = 1,2$
c) $(1,2)t = 2$
d) $2t = 1,2$
e) $t^2 = 1,2$

11) (FGV-2005) Um computador desvaloriza-se exponencialmente em função do tempo, de modo que seu valor y, daqui a x anos, será $y = A . k^x$, em que A e k são constantes positivas. Se hoje o computador vale R$ 5000,00 e valerá a metade desse valor daqui a 2 anos, seu valor daqui a 6 anos será:
a) R$ 625,00
b) R$ 550,00
c) R$ 575,00
d) R$ 600,00
e) R$ 650,00

12) (Mack-2008) Um aparelho celular tem seu preço "y" desvalorizado exponencialmente em função do tempo (em meses) "t", representado pela equação $y = p \cdot q^t$, com p e q constantes positivas. Se, na compra, o celular custou

R\$500,00 e, após 4 meses, o seu valor é $\frac{1}{5}$ do preço pago, 8 meses após a compra, o seu valor será

a) R\$25,00
b) R\$24,00
c) R\$22,00
d) R\$28,00
e) R\$20,00

13) (PUC-PR-2003) Todo x do intervalo $[0,2\pi]$ que satisfaz a equação

$$\frac{16^{\text{sen}^2 x}}{4^{5\text{sen}x}} = \frac{1}{64}$$

pertence ao intervalo:
a) $0 \le x \le 72°$
b) $72° \le x \le 144°$
c) $144° \le x \le 216°$
d) $216° \le x \le 288°$
e) $288° \le x \le 360°$

14) (Unicamp-2000) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $F(t) = a\,2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.

b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial?

c) Esboce o gráfico da função $F(t)$ para $t \in [0, 40]$.

15) (UFPB-1993) Sendo a e b raízes distintas da equação $2.4^x + 4 = 9.2^x$, calcular o valor de $a^6 + b^6$.

16) (Vunesp-2003) Sejam α e β constantes reais, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tais que $\log_{10}\alpha = 0{,}5$ e $\log_{10}\beta = 0{,}7$.
a) Calcule $\log_{10}\alpha\beta$, onde $\alpha\beta$ indica o produto de α e β.
b) Determine o valor de $x \in IR$ que satisfaz a equação

$$\left(\frac{\alpha\beta}{10}\right)^x = (\alpha\beta)^2$$

17) (UFC-2002) Sejam $f : R \to R$ e $g : R \to R$, sendo R o conjunto dos números reais, funções tais que:

i) f é uma função par e g é uma função ímpar;
ii) $f(x) + g(x) = 2^x$.

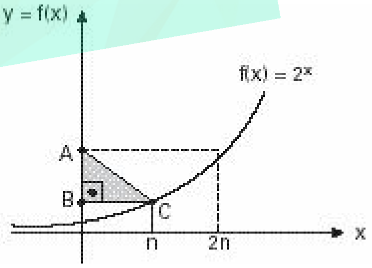
Determine $f(\log_2 3) - g(2)$.

18) (Fuvest-2002) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:
a) a + b = 2
b) a + b = 1
c) a - b = 3
d) a - b = 2
e) a - b = 1

19) (Mack-2005) Se os inteiros x e y satisfazem a equação $3^{x+1} + 2^y = 2^{y+2} - 3^x$, então o valor de 3^x é:
a) 1
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{9}$
d) 3
e) 9

20) (UEL-1995) Se o número real K satisfaz à equação $3^{2x} - 4.3^x + 3=0$, então K^2 é igual a:
a) 0 ou $\frac{1}{2}$
b) 0 ou 1
c) $\frac{1}{2}$ ou 1
d) 1 ou 2
e) 1 ou 3

21) (UFSCar-2004) Se a área do triângulo retângulo ABC, indicado na figura, é igual a 3n, conclui-se que f (n) é igual a



a) 2.
b) $2\sqrt{2}$
c) 3.
d) $3\sqrt{2}$
e) 4.

22) (Mack-2002) Se $\frac{2^x 3^{x+2}}{3.5^{1-x}} = \frac{1}{50}$ então $x^2 - 3$ e igual a:
a) -2
b) -1

c) 1
d) 2
e) 3

23) (PUC-SP-1995) Se $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \log_y x = 2 \end{cases}$ então x+y é igual a:

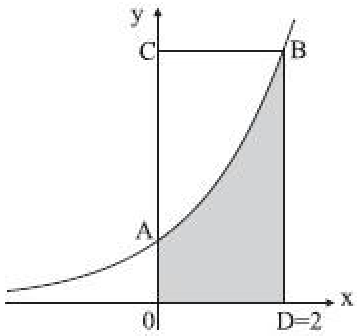
a) $\frac{5}{3}$.
b) $\frac{10}{9}$.
c) $\frac{8}{9}$.
d) $\frac{2}{3}$.
e) $\frac{5}{9}$.

24) (Vunesp-2003) Resolva as equações exponenciais, determinando os correspondentes valores de x.
a) $7^{(x-3)} + 7^{(x-2)} + 7^{(x-1)} = 57$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = -207$

25) (Fuvest-1998) Qual desses números é igual a 0,064?

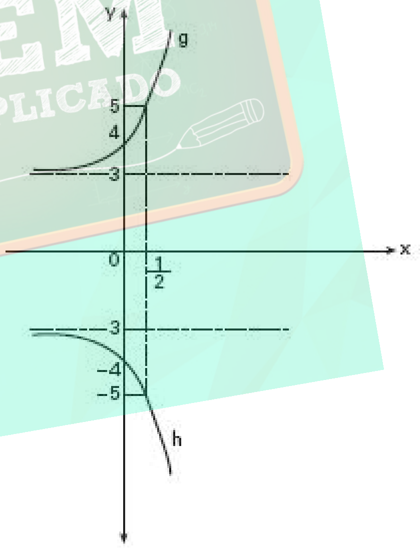
a) $\left(\frac{1}{80}\right)^2$
b) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$
c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$
d) $\left(\frac{1}{800}\right)^2$
e) $\left(\frac{8}{10}\right)^3$

26) (UFSCar-2007) Para estimar a área da figura ABDO (sombreada no desenho), onde a curva AB é parte da representação gráfica da função $f(x) = 2^x$, João demarcou o retângulo OCBD e, em seguida, usou um programa de computador que "plota" pontos aleatoriamente no interior desse retângulo.



Sabendo que dos 1000 pontos "plotados", apenas 540 ficaram no interior da figura ABDO, a área estimada dessa figura, em unidades de área, é igual a
a) 4,32.
b) 4,26.
c) 3,92.
d) 3,84.
e) 3,52.

27) (FGV-2005) Os gráficos das funções exponenciais g e h são simétricos em relação à reta y = 0, como mostra a figura: Sendo $g(x) = a + b.c^x$ e $h(x) = d + e.f^x$, a soma a + b + c + d + e + f é igual a



a) 0.
b) $\frac{7}{3}$.
c) $\frac{10}{3}$.
d) 8.
e) 9.

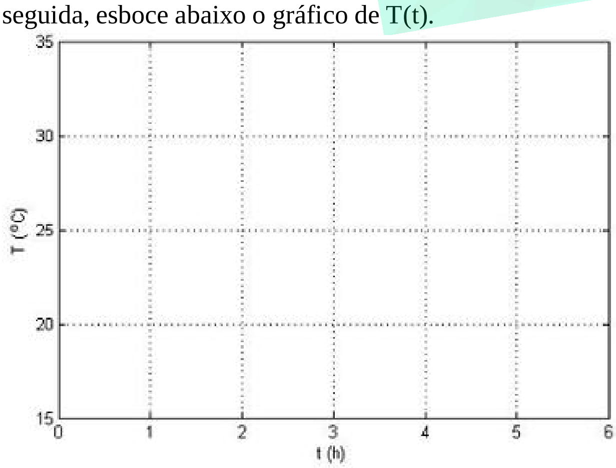
28) (Vunesp-2001) Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural a se desintegrar

(emitindo partículas e se transformando em outro elemento). Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Suponhamos que certa quantidade de um elemento radioativo com inicialmente m0 gramas de massa se decomponha segundo a equação matemática:
$m(t) = m_0.10^{-t/70}$,
onde m(t) é a quantidade de massa radioativa no tempo t (em anos).
Usando a aproximação log 2 = 0,3, determine
a) log 8;
b) quantos anos demorará para que esse elemento se decomponha até atingir um oitavo da massa inicial.

29) (UFPB-2006) O total de indivíduos, na *n*-ésima geração, de duas populações *P* e *Q*, é dado, respectivamente, por $P(n) = 4^n$ e $Q(n) = 2^n$. Sabe-se que, quando $\frac{P(n)}{Q(n)} \geq 1024$, a população *Q* estará ameaçada de extinção. Com base nessas informações, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da

a) décima geração.
b) nona geração.
c) oitava geração.
d) sétima geração.
e) sexta geração.

30) (UNICAMP-2009) O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}) . 10^{-t/4} + T_{ext}$, onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21°C$ e $T_{ext} = 30°C$, responda as questões abaixo.
a) Calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado. Em seguida, esboce abaixo o gráfico de T(t).



b) Calcule o tempo gasto, a partir do momento da quebra do ar condicionado, para que a temperatura subisse 4°C. Se necessário use, use $\log_{10} 2 \approx 0,30$, $\log_{10} 3 \approx 0,48$, e $\log_{10} 5 \approx 0,70$.

31) (Unicamp-2003) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha.3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18ºC. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0ºC após 90 minutos e chegou a -16ºC após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.
b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ ºC superior à temperatura ambiente.

32) (UFSCar-2003) O par ordenado (x,y), solução do sistema $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$ é

a) $(5, \frac{3}{2})$
b) $(5, -\frac{3}{2})$
c) $(3, \frac{2}{3})$
d) $(1, \frac{3}{2})$
e) $(1, \frac{1}{2})$

33) (Mack-2005) O número N de bactérias de uma cultura é dado, em função do tempo t, em horas, por $N(t) = 10^5.2^{4t}$. Supondo log2 = 0,3, o tempo necessário para que o número inicial de bactérias fique multiplicado por 100 é:
a) 2 horas e 2 minutos
b) 2 horas e 12 minutos
c) 1 hora e 40 minutos
d) 1 hora e 15 minutos
e) 2 horas e 20 minutos

34) (UFRJ-2005) O número de bactérias em uma certa cultura dobra a cada hora. A partir da amostra inicial, são necessárias 24 horas para que o número de bactérias atinja uma certa quantidade Q. Calcule quantas horas são necessárias para que a quantidade de bactérias nessa cultura atinja a metade de Q.

35) (FGV-2004) O gerente de produção de uma indústria construiu a tabela abaixo, relacionando a produção dos operários com sua experiência.

Experiência (meses)	*0*	*6*
Produção (unidades por hora)	*200*	*350*

Acredita o gerente que a produção Q se relaciona à experiência t, através da função
$Q(t) = 500 - A.e^{-kt}$, sendo e = 2,72 e k um número real, positivo.
a) Considerando que as projeções do gerente de produção dessa indústria estejam corretas, quantos meses de experiência serão necessários para que os operários possam produzir 425 unidades por hora?
b) Desse modo, qual será a máxima produção possível dos operários dessa empresa?

36) (Mack-1996) O domínio da função real definida por

$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{1 - |3^x - 2|}}$ é:

a)] 0,1 [
b)] 1,2 [
c)] 2,3 [
d)] 3,4 [
e)] 4,5 [

37) (UNICAMP-2007) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0.2^{-bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante t = 0.
a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante b.
b) Dada uma concentração inicial P_0 , de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0. Considere $\log_2 10 \approx 3,32$.

38) (Vunesp-2000) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h30min o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja 36,5°C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por
$D(t) = D_o.2^{(-2\alpha t)}$,
onde t é o tempo em horas, D_o é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante t = 0, D(t) é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte.

	Hora	Temperatura do corpo (°C)	Temperatura do quarto (°C)	Diferença de temperatura (°C)
t = ?	morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0	22h30min	32,5	16,5	$D(0) = D_o = 16$
t = 1	23h30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2,3$ e $\log_2 3 = 1,6$ determine:
a) a constante α;
b) a hora em que a pessoa morreu.

39) (AFA-1998) O conjunto-solução da inequação $(0,5)^{x(x-2)} < (0,25)^{x-1,5}$ é

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$.
b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 3\}$.
c) $\{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x < 3\}$.
d) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$.

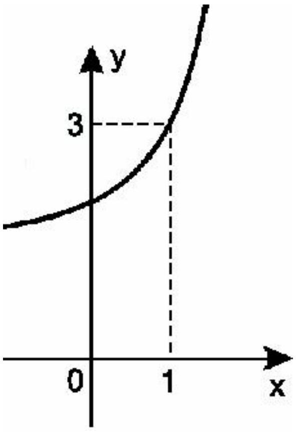
40) (VUNESP-2009) O altímetro dos aviões é um instrumento que mede a pressão atmosférica e transforma esse resultado em altitude. Suponha que a altitude h acima do nível do mar, em quilômetros, detectada pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atm, por

$h(p) = 20.\log_{10}\left(\dfrac{1}{p}\right)$

Num determinado instante, a pressão atmosférica medida pelo altímetro era 0,4 atm. Considerando a aproximação $\log_{10} 2 = 0,3$, a altitude h do avião nesse instante, em quilômetros, era de
a) 5.
b) 8.
c) 9.
d) 11.
e) 12.

41) (Vunesp-2003) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função $q(t) = q_0.2^{(-0,1)t}$ sendo q_0 a quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água no reservatório após t meses.
Em quantos meses a quantidade de água do reservatório se reduzirá à metade do que era no início?
a) 5.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

42) (Mack-2002) Na figura temos o esboço do gráfico de $y = a^x + 1$. O valor de 2^{3a-2} é:



a) 16
b) 8
c) 2
d) 32
e) 64

43) (FGV - SP-2009) Hermann Ebbinghaus (1850-1909) foi o pioneiro nas pesquisas experimentais sobre memória, no século XIX. Foi o próprio sujeito em uma dessas pesquisas, na qual criou palavras que, embora sem sentido, foram, por meio da repetição, aprendidas com sucesso. Depois, testou sua memória em vários intervalos de tempo. Usou sílabas ininteligíveis em seus testes, para assegurar-se de que o ato puro da recordação não fosse maculado pelo significado.
A perda acelerada de informação pelo subconsciente é conhecida como "curva do esquecimento", e pode ser utilizada para estimar a porcentagem de matéria de que, um tempo após tê-la aprendido, um estudante pode se lembrar; um modelo matemático para esse percentual de retenção é dado pela função:
$y = y(x) = (100-a)10^{-kx} + a$
em que x é o tempo, dado em semanas, k e a são constantes positivas e $0 < a < 100$.
a) Dê a expressão de $y = y(x)$ no caso em que $a = 15$, $k = 0{,}2$ e $x \geq 0$. Esboce o gráfico da função obtida.
b) Explique, a partir da função obtida no subitem a, o que ocorre à medida que o tempo passa.
c) Utilizando-se das constantes do subitem a, calcule o percentual de retenção após decorrido o tempo de uma semana.
(Observação: caso necessite, $\log 0{,}63 \cong -0{,}2$)

44) (Unicamp-1995) Esboce os gráficos das funções $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e $y = e^x + e^{-x} - 3$ em um mesmo sistema de eixos ortogonais. Mostre que a equação $e^x + e^{-x} - 3 = 0$ tem duas raízes reais simétricas $x = a$ e $x = -a$. Mostre, ainda, que $e^{3a} + e^{-3a} = 18$

45) (FGV-2004) É consenso, no mercado de veículos usados, que o preço de revenda de um automóvel importado decresce exponencialmente com o tempo, de acordo com a função $V = K.x^t$. Se 18 mil dólares é o preço atual de mercado de um determinado modelo de uma marca famosa de automóvel importado, que foi comercializado há 3 anos por 30 mil dólares, depois de quanto tempo, a partir da data atual, seu valor de revenda será reduzido a 6 mil dólares?
É dado que $\log \frac{3}{15} = 0{,}4$; $V = K.x^t$, V é o preço de revenda após t anos e K e x são constantes
a) 5 anos
b) 7 anos
c) 6 anos
d) 8 anos
e) 3 anos

46) (Vunesp-1999) Duas funções f(t) e g(t) fornecem o número de ratos e o número de habitantes de uma certa cidade em função do tempo t (em anos), respectivamente, num período de 0 a 5 anos. Suponha que no tempo inicial (t = 0) existiam nessa cidade 100 000 ratos e 704 000 habitantes, que o número de ratos dobra a cada ano e que a população humana cresce 2 000 habitantes por ano. Pede-se:

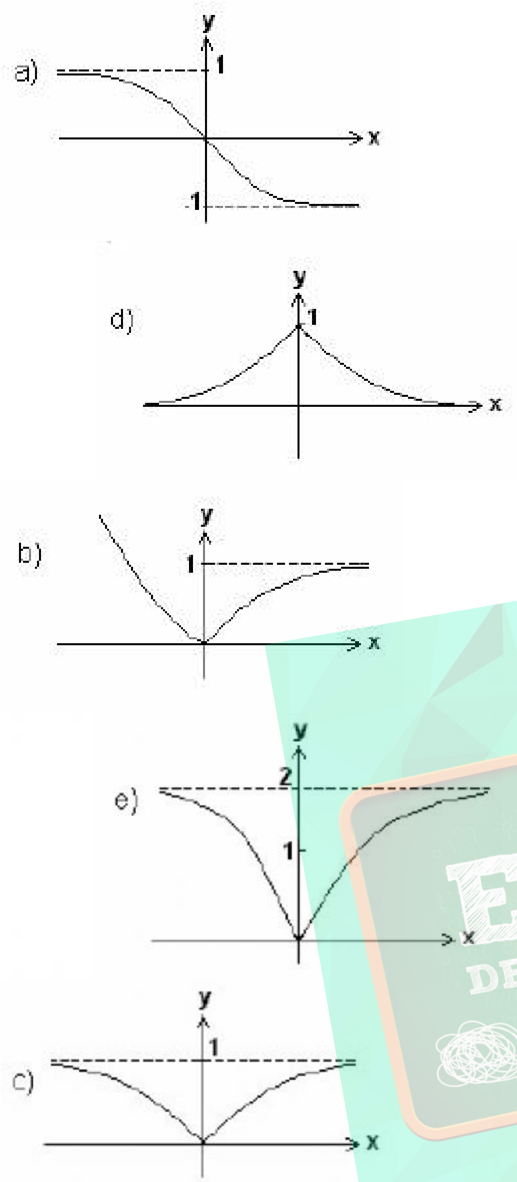
a) As expressões matemáticas das funções f(t) e g(t).
b) O número de ratos que haverá por habitante, após 5 anos.

47) (UFSC-1996) Determinar o valor de x na equação $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=775$.

48) (PUC-PR-2003) Determinando as soluções da equação $a^x > a^{x^2}$, verificamos que elas estão somente no intervalo:
I. (0, 1) se $a > 1$
II. $(1, \infty)$ se $0 < a < 1$
III. $(-\infty, 0)$ se $a > 1$
IV. (-1, 1) se $0 < a < 1$
Com respeito às afirmações acima, podemos afirmar que:

a) exatamente duas são verdadeiras.
b) todas as afirmações são falsas.
c) somente uma é verdadeira.
d) somente uma é falsa.
e) todas as firmações são verdadeiras.

49) (Fuvest-2004) Das alternativas abaixo, a que melhor corresponde ao gráfico da função $f(x) = 1 - 2^{-|x|}$ é:



50) (FGV-2005) Daqui a t anos, o número de habitantes de uma cidade será $N = 40000(1,02)^t$. O valor de t para que a população dobre em relação a de hoje é:

a) $\frac{\log 2}{\log 1,02}$
b) 50
c) (log2)(log1,02)
d) $2^{\frac{\log 2}{\log 1,02}}$
e) 2(log2)(log1,02)

51) (Vunesp-2005) Dada a inequação $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{3}{9}\right)^{x-3}$ o conjunto verdade V, considerando o conjunto universo como sendo o dos reais, é dado por

a) V = {x ∈ IR | x ≤ -3 ou x ≥ 2}.
b) V = {x ∈ IR | x ≤ -3 e x ≥ 2}.
c) V = {x ∈ IR | -3 ≤ x ≤ 2}.
d) V = {x ∈ IR | x ≤ -3}.
e) V = {x ∈ IR | x ≥ 2}.

52) (Vunesp-2004) Considere função dada por $f(x) = 3^{2x+1} + m3^x + 1$.
a) Quando m = -4, determine os valores de x para os quais f(x) = 0.
b) Determine todos os valores reais de m para os quais a equação f(x) = m + 1 não tem solução real x.

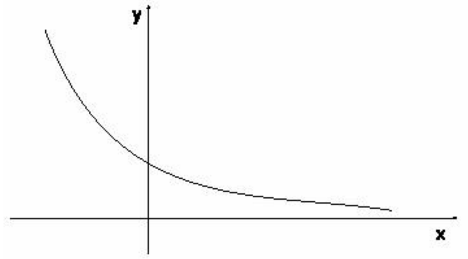
53) (UEL-1994) Considere as soluções reais de $3^a.3^{7x}.3^{12}=1$. Se $a = x^2$, então a diferença entre a maior e a menor dessas raízes é:
a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

54) (Vunesp-2005) Considere as funções $f(x) = \log_3(9x^2)$ e $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, definidas para todo x > 0.
a) Resolva as duas equações: f(x) = 1 e g(x) = -3.
b) Mostre que $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$.

55) (Vunesp-1999) Considere a seqüência $(a_n) = (3^{2n} -1)$, n ∈ N.

a) Para cada n ∈ N, mostre que $a_{n+1} = a_n + 8.3^{2n}$.
b) Demonstre, por indução sobre n, que a_n é divisível por 8, para todo n ∈ N.

56) (Vunesp-1998) Considere a função exponencial $f(x) = a^x$ (portanto, a > 0 e a≠1) e as afirmações:
I: $a^2 < a$ e
II: $a^2 > 2a$.
Para se concluir que o gráfico de f(x) tem a forma :



a) a afirmação I, sozinha, é suficiente, mas a afirmação II, sozinha, não é.
b) a afirmação II, sozinha, é suficiente, mas a afirmação I, sozinha, não é.

c) as afirmações I e II, juntas, são suficientes, mas nenhuma delas, isoladamente, é suficiente.
d) tanto a afirmação I como a afirmação II, sozinhas, são suficientes.
e) as afirmações I e II, juntas, não são suficientes.

57) (Unicamp-2002) Considere a equação
$2^x + m2^{2-x} - 2m - 2 = 0$, onde *m* é um número real.

a) Resolva essa equação para *m* = 1.
b) Encontre todos os valores de *m* para os quais a equação tem uma única raiz real.

58) (FGV-2004) Considerando os valores log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o valor de x que satisfaz a equação $36^x = 24$, é:
a) $\frac{49}{78}$
b) $\frac{69}{78}$
c) $\frac{59}{78}$
d) $\frac{64}{78}$
e) $\frac{54}{78}$

59) (VUNESP-2009) As estradas (oficiais e não oficiais) na Amazônia têm um importante papel na evolução do desmatamento: análises mostram que o risco de desmatamento aumenta nas áreas mais próximas às estradas. A função
P(d) = $\dfrac{3^{-1,3d+3,5}}{1+3^{-1,3d+3,5}}$
fornece, aproximadamente, a probabilidade de desmatamento de uma área na Amazônia em função da distância d da estrada, em quilômetros (INPE, Anais do XIII Simpósio de Sensoriamento Remoto, 2007 - modificada).
Com base nessa função, determine para qual distância d a probabilidade de desmatamento é igual a 0,8.
Use a aproximação $\log_3 2 = 0,6$

60) (FGV-2003) a) Obtenha os valores de x e y que satisfazem o sistema abaixo:
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ \log_4 x - \log_4 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$
b) Qual o conjunto solução da equação exponencial $5^{2x} - 5^{x+1} + 4 = 0$?

61) (Fuvest-1995) a) Esboce, num mesmo sistema de coordenadas, os gráficos de $f(x)=2^x$ e $g(x)=2x$.

b) Baseado nos gráficos da parte a), resolva a inequação $2^x \leq 2x$.
c) Qual é o maior: $2^{\sqrt{2}}$ ou $2\sqrt{2}$? Justifique brevemente sua resposta.

62) (Vunesp-2002) A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água (t = 0) até o instante em que mergulhou (t = T), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático
$h(t) = 4t - t.2^{0,2.t}$,
com t em segundos, h(t) em metros e 0 □□t □□T. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi
a) 1.
b) 2.
c) 4.
d) 8.
e) 10.

63) (Mack-1996) A soma das raízes da equação $3^{3x} - 13.3^{2x} + 39.3^x - 27 = 0$ é:
a) –1.
b) 0.
c) 1.
d) 2.
e) 3.

64) (Mack-1997) A solução real k da equação $(3.9^x - 15^x)/25^x = 2$ é:
a) tal que $5k = \sqrt{k}$.
b) um elemento de IR_- .
c) um elemento de {-5; -3; 2; 3; 5}.
d) tal que k ≥ 2.
e) tal que 0 < k < 2.

65) (FEI-1995) A solução da equação real $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$ é:
a) x= 0
b) x= $\log_3 4$
c) x= 1
d) x= $\log_4 3$
e) x= $\log_2 5$

66) (UDESC-1996) A solução da equação exponencial $25^x - 26.5^x + 25 = 0$ é:
a) 0 e 2
b) 1 e 2
c) -1 e 2
d) 0 e -1
e) 0 e 1

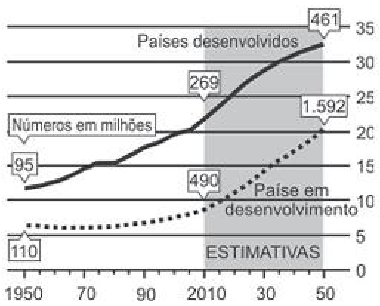
67) (UFPB-1977) A solução da equação da $2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-2} = 14$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

68) (UNIFESP-2007) A relação $P(t) = P_0(1 + r)^t$, onde $r > 0$ é constante, representa uma quantidade P que cresce exponencialmente em função do tempo $t > 0$. P_0 é a quantidade inicial e r é a taxa de crescimento num dado período de tempo. Neste caso, o *tempo de dobra* da quantidade é o período de tempo necessário para ela dobrar. O tempo de dobra T pode ser calculado pela fórmula
a) $T = \log_{(1+r)} 2$.
b) $T = \log_r 2$.
c) $T = \log_2 r$.
d) $T = \log_2 (1+ r)$.
e) $T = \log_{(1+r)} (2r)$.

69) (FGV-2005) A posição de um objeto A num eixo numerado é descrita pela lei $\frac{1}{8} - \frac{7}{8}.2^{-0,5t}$, onde t é o tempo em segundos. No mesmo eixo, move-se o objeto B, de acordo com a lei 2^{-t}. Os objetos A e B se encontrarão num certo instante t_{AB}. O valor de t_{AB}, em segundos, é um divisor de
a) 28.
b) 26.
c) 24.
d) 22.
e) 20.

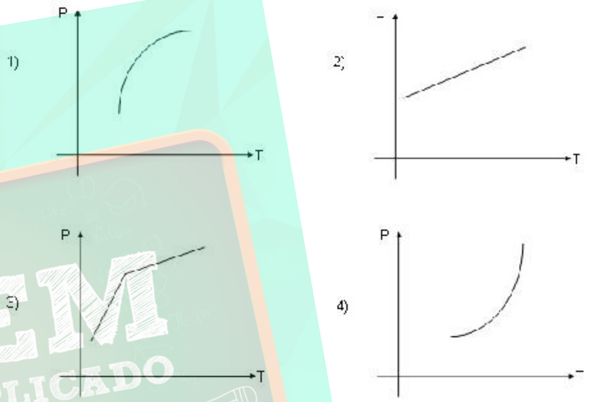
70) (NOVO ENEM-2009) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: "Perspectivas da população mundial", ONU, 2009. Disponível em: www.economist.com. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

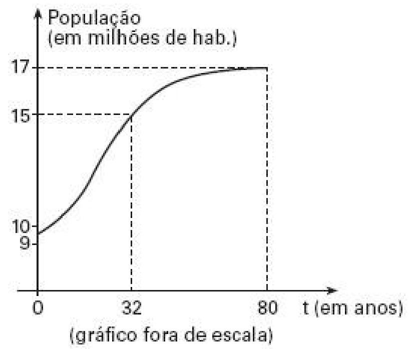
Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que x = 0 corresponde ao ano 2000, x = 1 corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3}=1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre
a) 490 e 510 milhões.
b) 550 e 620 milhões.
c) 780 e 800 milhões.
d) 810 e 860 milhões.
e) 870 e 910 milhões.

71) (UFC-1998) A população de uma cidade **X** aumenta 1500 habitantes por ano e a população de uma cidade **Y** aumenta 3% ao ano.
Considere os seguintes gráficos:



Analisando os gráficos acima, assinale a opção que indica aqueles que melhor representam os crescimentos populacionais P das cidades **X** e **Y**, respectivamente, em função do tempo T.
a) 1 e 2
b) 2 e 3
c) 1 e 4
d) 2 e 4
e) 3 e 4

72) (Vunesp-2006) A função $p(x) = 9 + \frac{8}{1+12.3^{-(0,1)t}}$ expressa, em função do tempo t (em anos), aproximadamente, a população, em milhões de habitantes, de um pequeno país, a partir de 1950 (t = 0). Um esboço do gráfico dessa função, para $0 \leq t \leq 80$, é dado na figura.



a) De acordo com esse modelo matemático, calcule em que ano a população atingiu 12 milhões de habitantes. (Use as aproximações $\log_3 2 = 0,6$ e $\log_3 5 = 1,4$.)
b) Determine aproximadamente quantos habitantes tinha o país em 1950. Com base no gráfico, para $0 \le t \le 80$, admitindo que $p(80) = 17$, dê o conjunto solução da inequação $p(t) \ge 15$ e responda, justificando sua resposta, para quais valores de k a equação $p(t) = k$ tem soluções reais.

73) (Unicamp-2004) A função $L(x) = ae^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.
a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b, sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.
b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

74) (VUNESP-2008) A função $f(x) = 500.\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x}{10}}$, com x em anos, fornece aproximadamente o consumo anual de água no mundo, em km^3, em algumas atividades econômicas, do ano 1900 (x = 0) ao ano 2000 (x = 100). Determine, utilizando essa função, em que ano o consumo de água quadruplicou em relação ao registrado em 1900.
Use as aproximações log2 = 0,3 e log5 = 0,7.

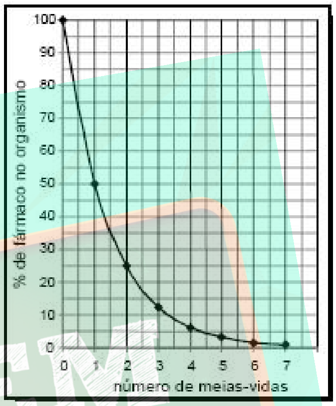
75) (Uneb-1998) A expressão $P(t) = K.2^{0,05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300 000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?

a) 352 000
b) 401 000
c) 423 000
d) 439 000
e) 441 000

76) (Fuvest-1999) A equação $2^x = -3x + 2$, com x real:

a) não tem solução.
b) tem uma única solução entre 0 e $\frac{2}{3}$.
c) tem uma única solução entre $-\frac{2}{3}$ e 0.
d) tem duas soluções, sendo uma positiva e outra negativa.
e) tem mais de duas soluções.

77) (ENEM-2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meiavida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meiavida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.
F. D. Fuchs e Cher l. Wannma. **Farmacologia Clínica**.
Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.
A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de
a) 10%.
b) 15%.
c) 25%.
d) 35%.
e) 50%.

78) (UFSCar-2009) A cafeína tem ação central e periférica, podendo influir positivamente no raciocínio, concentração e metabolismo. Em 1927 um pesquisador fez um experimento com 60 indivíduos que foram submetidos a doses crescentes de cafeína, de 5 a 60 centigramas (cg). Esses indivíduos realizavam operações aritméticas cuja velocidade aumentava linearmente com o logaritmo da dose.
(Hernani Pinto de Lemos Júnior, Vamos tomar café?, Diagnóstico & Tratamento, julho/agosto/setembro 2007. Adaptado.)
Utilize os dados da tabela a seguir e responda.

x	log x
2	0,3
3	0,5

a) Admita que um indivíduo submetido a 5 cg de cafeína realize 7 operações aritméticas a cada dez segundos. Calcule quantas operações aritméticas a cada dez segundos esse indivíduo deverá realizar se estiver sob efeito de 60 cg de cafeína.
b) Faça em seu caderno de respostas um esboço do gráfico da velocidade (operações aritméticas por dez segundos) em função do logaritmo da dose (dose em centigramas) de cafeína ingerida, tomando como base o intervalo descrito no enunciado do problema.

79) (FGV-2004) . Os números inteiros **x** e **y** satisfazem a equação $2^{x+3} + 2^{x+1} = 5^{y+3} + 3.5^{y}$. Então **x - y** é:
a) 8
b) 5
c) 9
d) 6
e) 7

Gabarito

1) Alternativa: D

2) Alternativa: E

3) Resposta: a) A = 50, B = 30 e K = $\frac{1}{2}$
b) 1,4.

4) Alternativa: B

5) Alternativa: B

6) Alternativa: D

7) Alternativa: E

8) a) 5 120 unidades
b) 20 dias após o encerramento

9) a) $\frac{3P}{4} = 0{,}75P$

b) $\frac{9P}{16} = 0{,}5625P$

c) 5

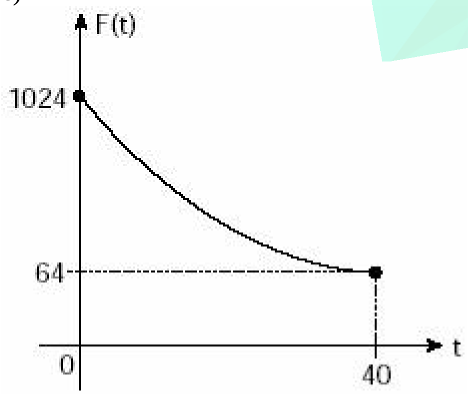
10) Alternativa: A

11) Alternativa: A

12) Alternativa: E

13) Alternativa: B
x = 90º

14) a) a = 1024 e b = 1/10
b) t = 30 anos
c)



15) 65 pois as raízes são a = -1 e b = 2.

16) a) 1,2
b) x = 12

17) Resp: -5/24

Resolução: observemos inicialmente que $f(-x) + g(-x)= 2^{-x}$, por ii).
Como f é par e g é ímpar, esta igualdade pode ser escrita assim:
$f(x) - g(x) = 2^{-x}$.
Obtemos assim as seguintes igualdades:
$f(x) + g(x) = 2^{x}$
$f(x) - g(x) = 2^{-x}$.

Adicionando-as obtemos $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$. Subtraindo da primeira a segunda obtemos: $g(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$.

Portanto, $f(\log_2 3) - g(2) = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} - \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{-5}{24}$.

18) Alternativa: E
$f(x) = 2^{2x+1}$ e $f(a) = 4f(b) \Rightarrow 2^{2a+1} = 4 \cdot 2^{2b+1} \Rightarrow 2^{2a+1} = 2^{2b+3} \Rightarrow 2a + 1 = 2b + 3 \Rightarrow$ **a - b = 1**

19) Alternativa: D

20) Alternativa: B

21) Alternativa: C

22) Alternativa: A

23) Alternativa: B

24) a) S = { 3 }
b) S = { –3 }

25) Alternativa: C

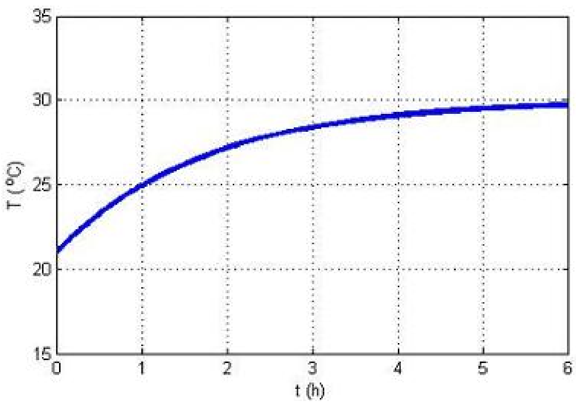
26) Alternativa: A

27) Alternativa: D

28) a) log 8 = 0,9
b) 63 anos

29) Alternativa: A

30) a) 29,1ºC.



b) 1,04 hora (ou 1h2m24s).

31) No congelador, a temperatura ambiente é -18° C.
a) Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} -18 + \alpha.3^{\beta.90} = 0 \\ -18 + \alpha.3^{\beta.270} = -16 \end{cases}$$

Encontramos $\beta = -1/90$ e $\alpha = 54$.
b) resolvendo uma equação exponencial, encontramos t = 360 min.

32) Alternativa: D

33) Alternativa: C

34) Como a quantidade de bactérias dobra a cada hora, a quantidade de bactérias atingirá a metade de Q em 23 horas.

35) a) 12 meses
b) o maior número inteiro de peças é 499.

36) Alternativa: A

37) a) $\frac{1}{29}$
b) aproximadamente 67,3 anos

38) a) $\alpha = 0{,}05$
b) às 19h30min, pois t = -3, ou seja, 3 horas antes da 1ª medição.

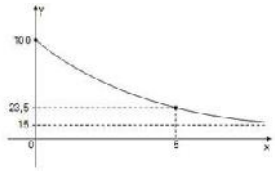
39) Alternativa: D

40) Alternativa: B

41) Alternativa: E

42) Alternativa: A

43) Resposta:
a)



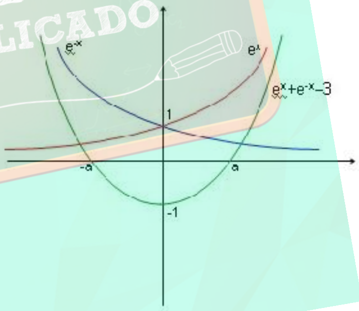
b) À medida que o tempo passa, o valor de y diminui, aproximando-se assintaticamente de 15. Note que para todo x real temos y > 15.

c) De log0,63 $\approx$ -0,2, temos $10^{-0,20} \approx 0{,}63$. Temos:
$y(1) = 85 \ 10^{-0,2.1} + 15$
$y(1) \approx 68{,}55$y(1)
Resposta: 68,55%

44) Obtendo as raízes de $e^x+e^{-x}-3 = 0$: (fazendo $e^x = t$ e resolvendo uma equação do 2° grau, e usando ln t para obter x)

$x_1 = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Para mostrar que são simétricas, mostraremos que $x_1+x_2 = 0$:

$\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \ln\frac{3^2-\sqrt{5}^2}{4} = \ln\frac{9-5}{4} = \ln 1 = 0$ (c.q.d.)



Além disso, precisamos mostrar que $e^{3a}+e^{-3a} = 18$. A partir de $e^a+e^{-a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$ temos que
$3^3 = (e^a+e^{-a})^3 = e^{3a} + 3e^a + 3e^{-a} + e^{-3a} = e^{3a}+e^{-3a} + 3(e^a+e^{-a}) = e^{3a}+e^{-3a} + 3(3) = e^{3a}+e^{-3a} + 9$
$27 = e^{3a}+e^{-3a} + 9 \rightarrow e^{3a}+e^{-3a} = 18$

45) Alternativa: C

46) a) $f(t) = 100000.2^t$
$g(t) = 2000t + 70000$

b) 40 ratos por habitante

47) Resposta: x = 3

48) Alternativa: C

49) Alternativa: C
Faça uma tabela de pontos; ou desenhe 2^{-x} para $x \geq 0$, faça a simetria em relação ao eixo y, faça a simetria em relação ao eixo x e some 1 unidade.

50) Alternativa: A

51) Alternativa: A

52) a) 0 e -1.
b) $-12 \leq m \leq 0$

53) Alternativa: D

54) a) Os conjuntos solução são, respectivamente, $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ e {27}.
b) basta usar as propriedades básicas dos logaritmos para demonstrar o que se pede.

55) a) $a_{n+1} = 3^{2(n+1)}-1 = 3^{2n}.9 - 1 = 8.3^{2n} + 3^{2n} - 1 = 8.3^{2n} + a_n$
b) 1) $a_0 = 0$ portanto divisível por 8 (ok)
2) Hipótese: a_k é divisível por 8 ($a_k = 3^{2k} - 1 = 8P$).
Tese: a_{k+1} também será divisível por 8

pelo item (a) temos que $a_{n+1} = 8.3^{2n} + a_n$ portanto $a_{k+1} = 8.3^{2k} + a_k$. Por hipótese a_k é divisível por 8 (e portanto múltiplo de 8). Assim, conseguimos provar que a_{k+1} também é divisível por 8, pois 8.3^{2k} é múltiplo de 8 e a soma de dois múltiplos de 8 resulta num novo múltiplo de 8 (que é divisível por 8).

56) Alternativa: A

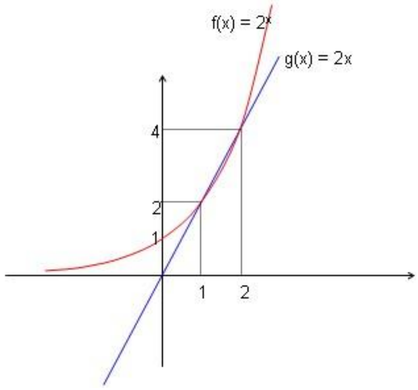
57) a) x = 1
b) m = 1 ou $m \leq 0$

58) Alternativa: B

59) Resposta: A distância d aproximadamente 1,77km.

60) a) x = 10 e y = 5
b) S = { 0, $\log_5 4$ }

61) a)



b) $1 \leq x \leq 2$

c) como $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ então temos que $2^{\sqrt{2}} \leq 2\sqrt{2}$, conforme visto no item b.

62) e) Tanto em t = 0 como em t = T, temos h(t) = 0. Então, $h(T) = 4T - T.2^{0,2T} = 0$ □ $T(4 - 2^{0,2T}) = 0$ □ T = 0 ou $2^2 = 2^{0,2T}$ □ **T=10**

63) Alternativa: E
Fazendo $3^x = t$:
$t^3-13t^2+39t-27 = (t^3-27)-13t(t-3) = (t-3)(t^2+3t+9)-13t(t-3) = (t-3)(t^2-10t+9) = (t-3)(t-1)(t-9) = 0$
→ t = 3 ou t = 1 ou t = 9 → $3^x = 3$ ou $3^x = 1$ ou $3^x = 9$ → x = 1 ou x =0 ou x = 2 portanto a soma das raízes é **3.**

64) Alternativa: A

65) Alternativa: B

66) Alternativa: A

67) Alternativa: C

68) Alternativa: A

69) Alternativa: C

70) Alternativa: E

71) Alternativa: D
A população da cidade **X** é dada por $P(T) = P_0 + 1500T$, onde P_0 é a população inicial, T é o tempo, e P(T) é a população num tempo qualquer. Portanto, P é uma função "afim" do tempo, e seu gráfico é uma semi-reta.
A população da cidade **Y** em função do tempo T é $P(T) = P_0(1{,}03)^T$. Portanto, P é uma função exponencial de T, com base maior do que 1, e, por conseguinte, o seu gráfico é o de uma função exponencial crescente. Logo, os gráficos que melhor representam os crescimentos populacionais das duas cidades são, respectivamente, o (2) e o (4).

72) a) 1968

b) $\frac{125}{13}$ milhões;

$\{t \in R|\ 32 \leq t \leq 80\}$ e $\frac{125}{13} \leq k \leq 17$

73) a) a = 120, b = -ln2
b) 3m.

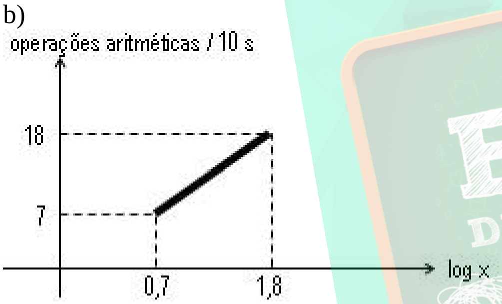
74) 1960

75) Alternativa: C

76) Alternativa: B

77) Alternativa: D

78) Resposta:
a) Esse indivíduo dever· realizar 18 operações aritméticas a cada 10 segundos.
b)



79) Alternativa: B